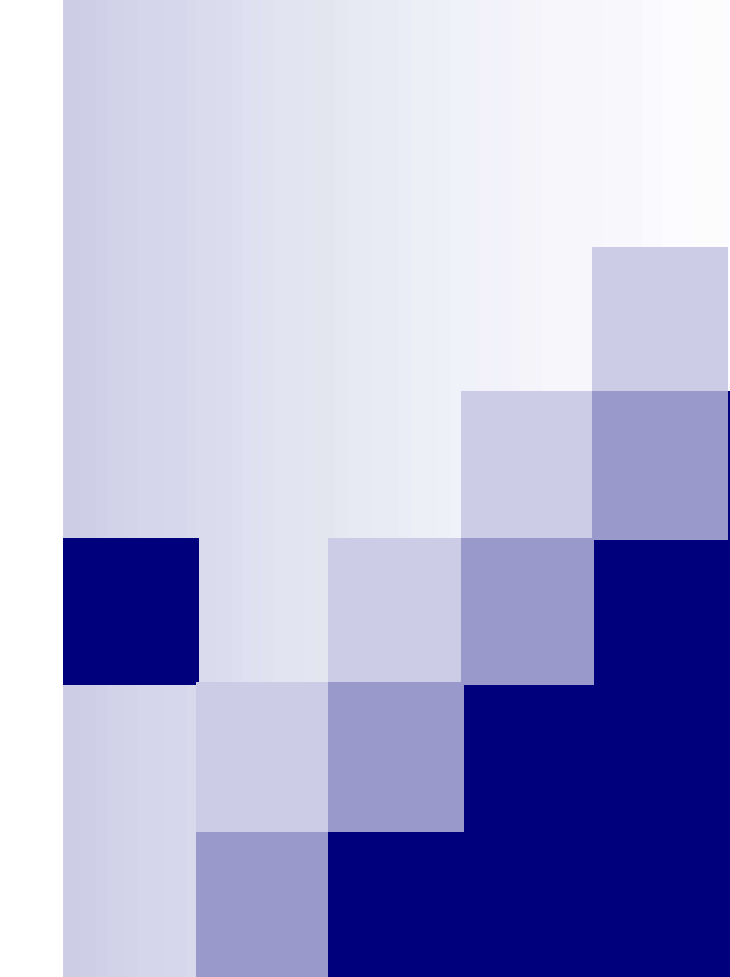
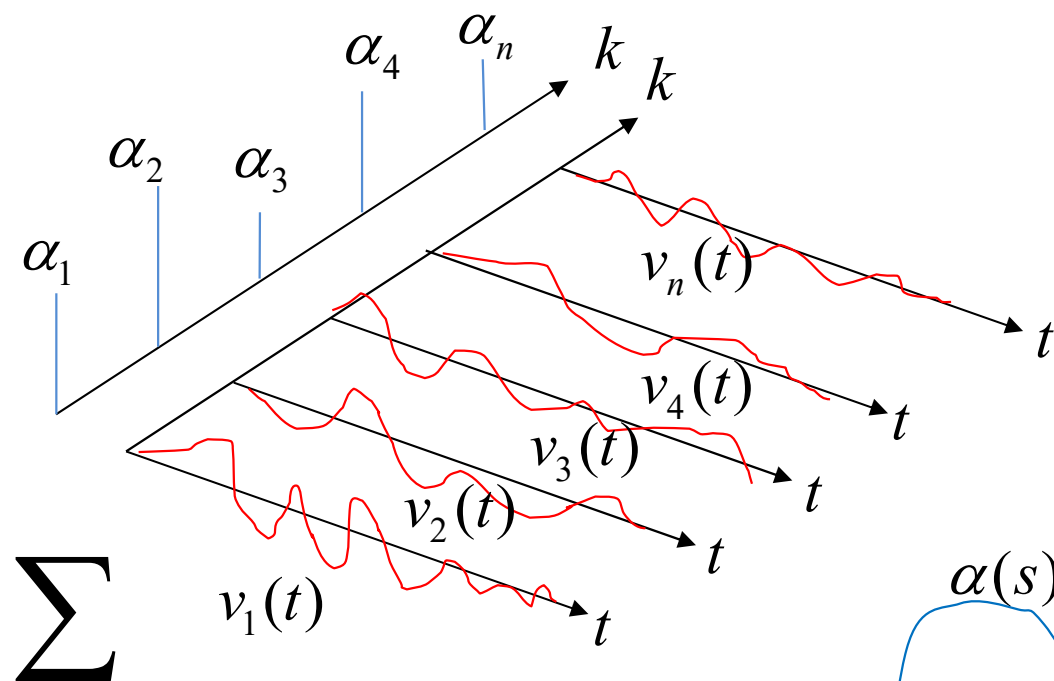




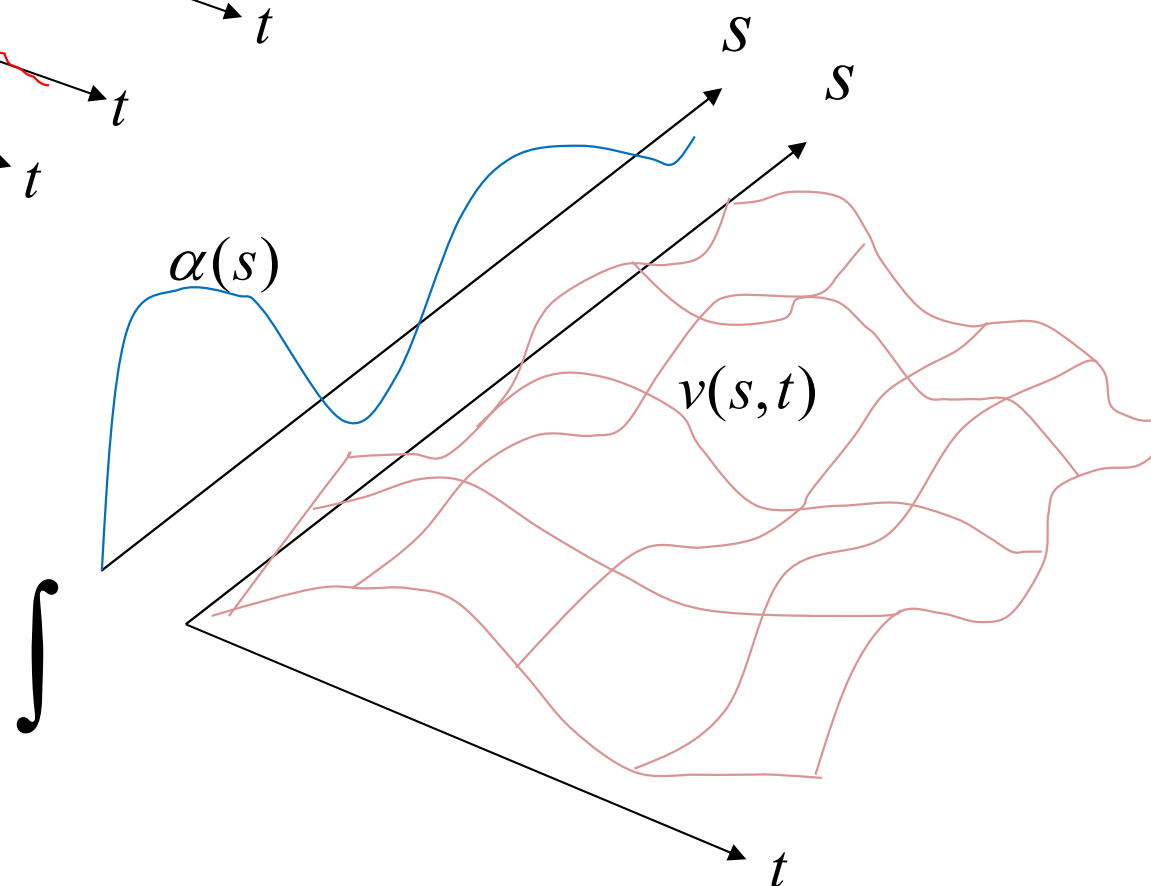
Сигнал түрлендірулері

Дискретті және үздіксіз көрінісі



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k v_k(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s) v(s, t) ds$$



Фурье түрлендіруі

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{тура}) \text{ Фурье түрлендіруі}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{кері Фурье түрлендіруі}$$

Рэлей жалпылама формуласы

$$\begin{aligned}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) e^{j2\pi\varphi t} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(f) e^{-j2\pi ft} df dt = \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) Y^*(f) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(\varphi-f)t} dt df d\varphi = \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) Y^*(f) \delta(\varphi - f) df d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df\end{aligned}$$

Сонымен,
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df$$

Парсеваль теңдігі

$$y(t) = x(t) \quad \text{кезінде аламыз}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Өрнектердің сол және оң жақ бөліктерінің симметриялы түрі мынаны ұсынуы керек:

Уақытша сигнал берудің «табиғи» уақытша көрінісі - бұл белгілі бір өзін-өзі көрсететін ядро көрінісі!

Мысалы.

Сигналдар кеңістігі үшін $L(-\infty, \infty)$ өзегі

$$u(t, \tau) = \delta(t - \tau) \quad s \rightarrow \tau$$

Спектрлік тығыздығы $\alpha(s) \rightarrow x(\tau)$

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt \quad \text{және керісінше}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Сигналдың динамикалық көрінісігімен сәйкес келетін бұл өрнек сигналдың әдеттегі уақытша көрінісін негізгі ядродағы интегралды (спектрлік) деп санауға болатындығын нақты көрсетеді $\delta(t - \tau)$

Мысалы. Гильберт түрлендіруі

$$u(t, \tau) = \frac{1}{\pi(\tau - t)}$$

$$s \rightarrow \tau$$

Спектрлік тығыздығы

$$\alpha(s) \rightarrow \hat{x}(\tau)$$

$$\hat{x}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{\tau - t} dt$$

Тура

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

Кері түрлендіру

Бұл Гильберттің түрлендірулері (тура және кері), атап айтқанда, тар жолақты детерминистік және кездейсоқ дірілдерді сипаттау үшін қолданылады.

Сигнал

Гильберт түрлендіруі

$u(t)$	$H(u)(t)$
КОНСТАНТА	0
$\sin \omega t$	$\operatorname{sgn}(\omega) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sgn}(\omega) \cos \omega t$
$\cos \omega t$	$\operatorname{sgn}(\omega) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sgn}(\omega) \sin \omega t$
$e^{i\omega t}$	$\operatorname{sgn}(\omega) e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = -i \cdot \operatorname{sgn}(\omega) e^{i\omega t}$
$\frac{1}{t^2 + 1}$	$\frac{t}{t^2 + 1}$
e^{-t^2}	$2\pi^{-1/2} F(t)$ ($F(t)$ — интеграл Дюсона)
Sinc $\frac{\sin t}{t}$	$\frac{1 - \cos t}{t}$

Дискретті сигналдың Фурье түрлендіруі

Кеңістіктен дискретті сигналдарды көрсету үшін l_2

$$u(f, n) = e^{j2\pi fn} \quad s \rightarrow f \quad t \rightarrow n$$

Спектралды тығыздығы $\alpha(s) \rightarrow X(f)$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}, \quad -1 \leq f \leq 1$$

интегралды көрінісі

$$x[n] = \int_{-0.5}^{0.5} X(f)e^{j2\pi fn} df, \quad n = \overline{-\infty, \infty}$$

Бұл тізбектерге арналған Фурье түрлендірулерінің жұбы (DTFT);
цифрлық сигналдарды өңдеуде кеңінен қолданылады

Детерминистік сигналдардың корреляция және спектрлік сипаттамалары

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(f) Y^*(f)}_{W_{xy}(f)} df$$

$$W_{xy}(f) = X(f) Y^*(f) \quad \text{Өзара спектрлік тығыздық}$$

$$W_x(f) = |X(f)|^2 \quad \text{Энергия сигналының спектрі (спектрлік энергия тығыздығы)}$$

$$E_x = (x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) df$$

Детерминистік сигналдардың корреляция және спектрлік сипаттамалары

Өзара спектрлік тығыздық фурьенің кері түрлендіруі

$$B_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \underbrace{Y^*(f) e^{j2\pi f\tau}}_{Y_{\tau}^*(f)} df$$

$$Y^*(f) e^{j2\pi f\tau} = Y_{\tau}^*(f)$$

$$Y_{\tau}(f) = Y(f) e^{-j2\pi f\tau} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{ЫҒЫСУ} \\ \text{теоремасы} \end{array}$$

$$B_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y_{\tau}^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt = (x, y_{\tau})$$

өзара корреляциялық функция

Детерминистік сигналдардың корреляция және спектрлік сипаттамалары

Сол сияқты

$$B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X^*(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X_{\tau}^*(f) df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt = (x, x_{\tau}) \end{aligned}$$

автокорреляциялық функция

Автокорреляциялық функцияның қасиеттері

Достигаает максимума в нуле

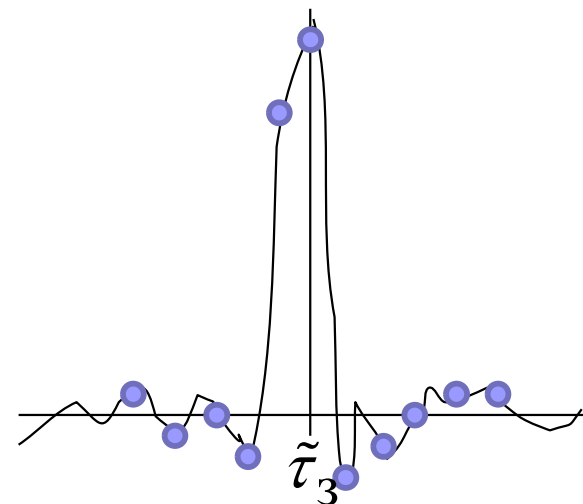
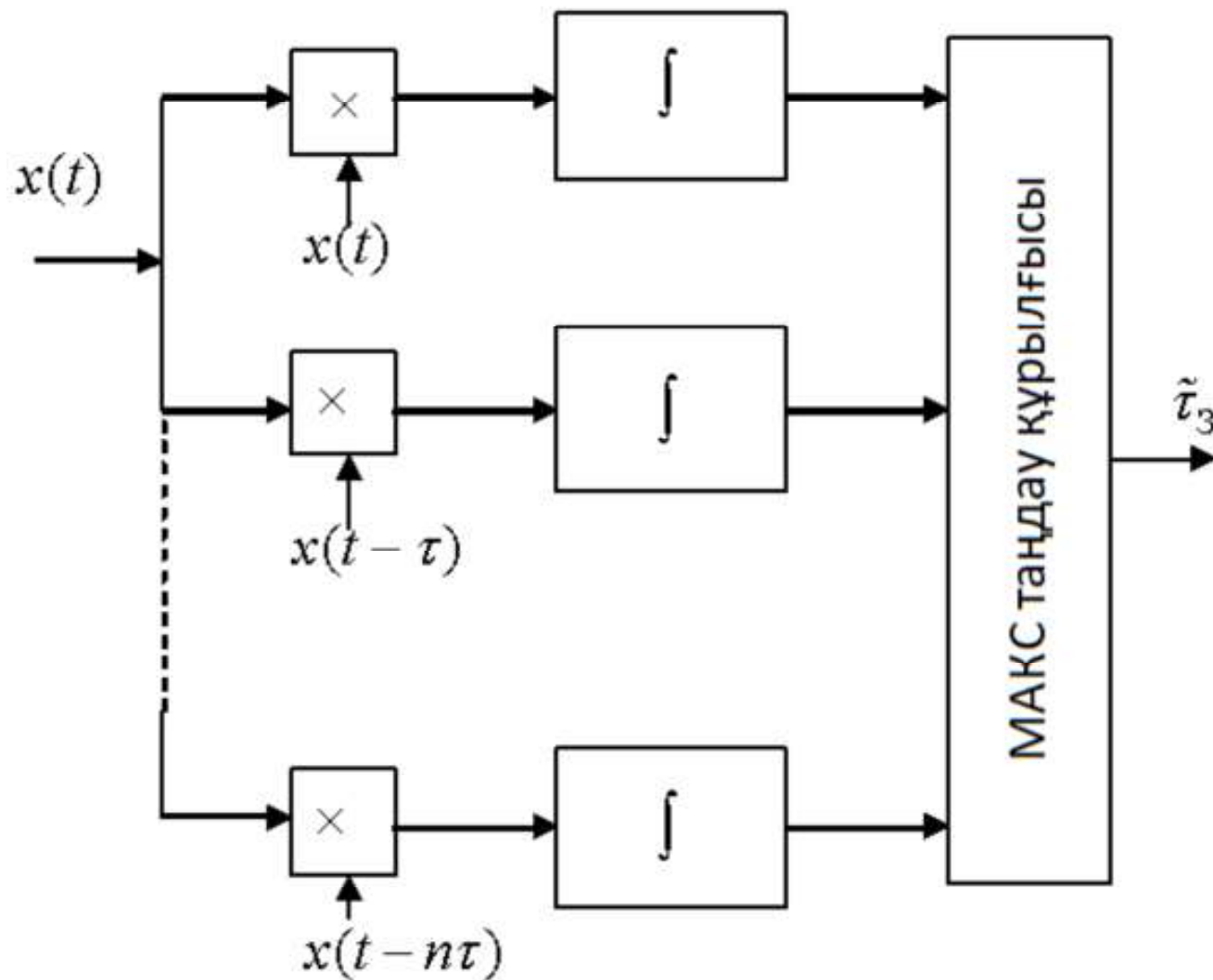
$$B_x(0) = \max_{\tau} B_x(\tau) = E_x$$

Симметрия қасиеті

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta + \tau) x^*(\theta) d\theta = \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) x^*(\theta + \tau) d\theta \right]^* = B_x^*(-\tau) \end{aligned}$$

АКФ жұп функция

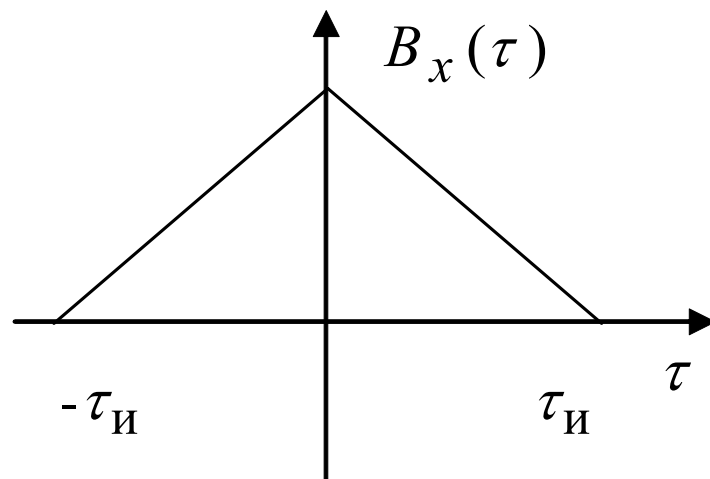
АКФ және ӨКФ қолданылу мысалы



$$k = 0, 1, \dots, n$$

$$\tau_3 = \tau \cdot \arg \max_k (x, x_{k\tau})$$

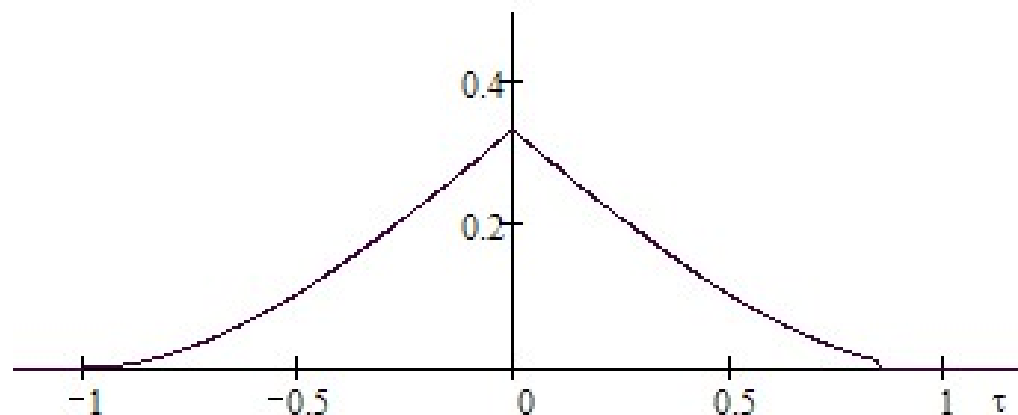
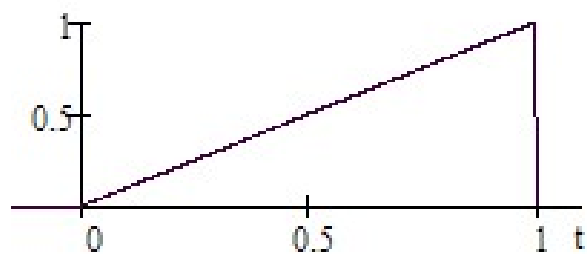
Тікбұрышты сигналдың АКФ



Максималды мәні

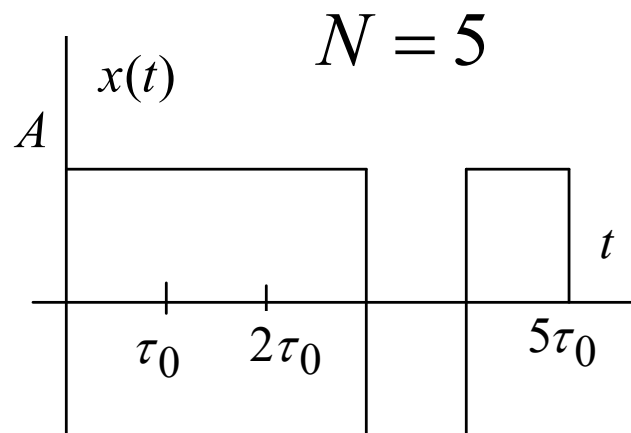
$$A^2 \tau_{\text{и}}$$

Аратәрізді импульстің АКФ



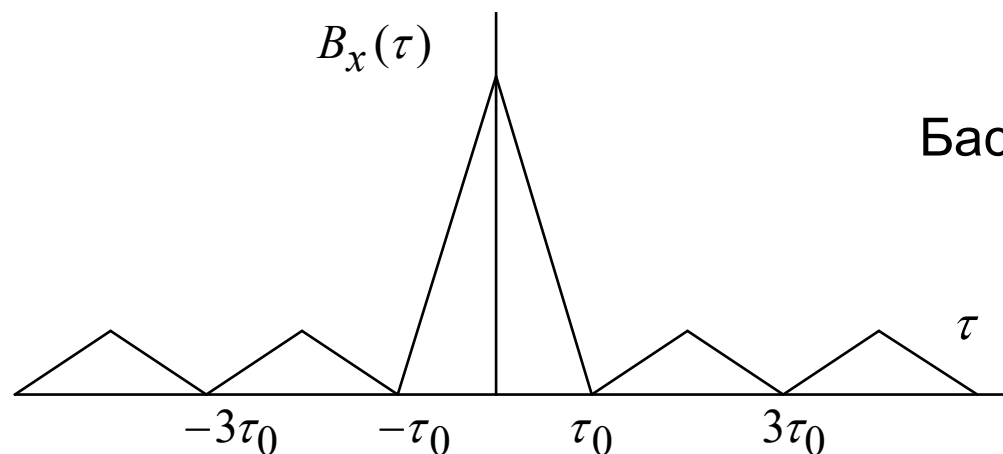
Сигнал Баркер (“коды”)

$$N \in \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13\}$$



Баркер қатары

2	+1 -1	- 1 +1
3	+1 +1 -1	
4	+1 -1 +1 +1	+1 -1 -1 -1
5	+1 +1 +1 -1 +1	
7	+1 +1 +1 -1 -1 +1 -1	
11	+1 +1 +1 -1 -1 -1 +1 -1 -1 +1 -1	
13	+1 +1 +1 +1 +1 -1 -1 +1 +1 -1 +1 -1 +1	



Басты жапырақша деңгейі $N\tau_0 A^2$

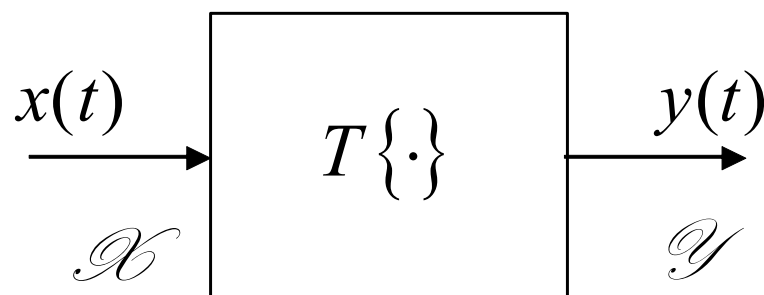
Бастапқыдан бір рет
бүйірлік жапырақтардың
деңгейлері N

Бүйірлік жапырақшалар деңгейі $1 / \sqrt{N}$

Сигналдарды түрлендіру сызықты жүйелер арқылы

Мақсатты түрлендірулер – бұл үшін жасалған құрылғыларда (тізбектерде).

Әдейі емес - мысалы, байланыс желілерінде (бұрмалау, әлсіреу және т.б.)



трансформация – кіріс сигналдар жиынын $\mathcal{X}$ шығыс сигналдар жиынына бейнелеу $\mathcal{Y}$

Сызықты операторлар

Егер $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2$ (немесе l_2)

түрлендіру оператор деп аталады.

Дербес жағдайда сүзгілеу

Оператор $\mathbb{L}\{\cdot\}$ **сызықты**, егер ол аддитивті болса -

$$\mathbb{L}\{x + y\} = \mathbb{L}\{x\} + \mathbb{L}\{y\}$$

бірқалыпты

$$\mathbb{L}\{\alpha x\} = \alpha \mathbb{L}\{x\}$$

суперпозиция принципі:

$$\mathbb{L}\{\alpha x + \beta y\} = \alpha \mathbb{L}\{x\} + \beta \mathbb{L}\{y\}$$

Суперпозиция принципінің маңыздылығы!

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k u_k(t) \longrightarrow \boxed{\mathbb{L}\{\cdot\}} \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \mathbb{L}\{u_k(t)\}$$

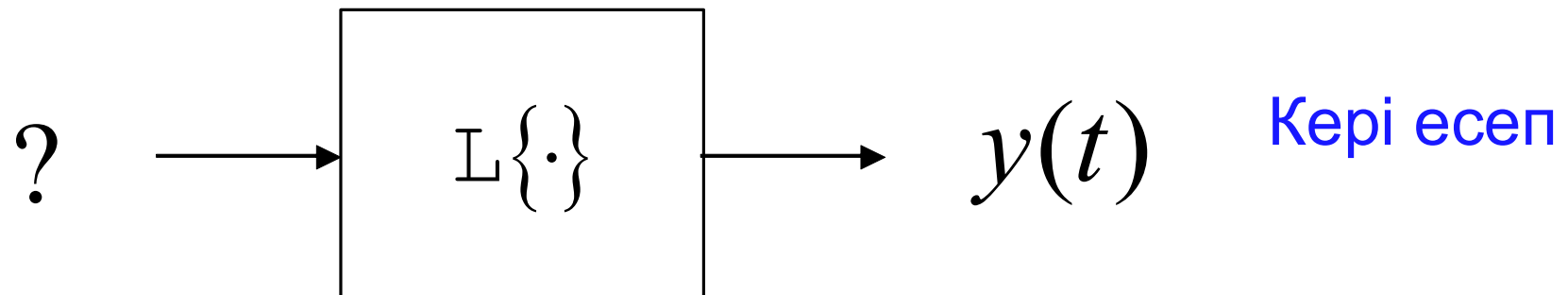
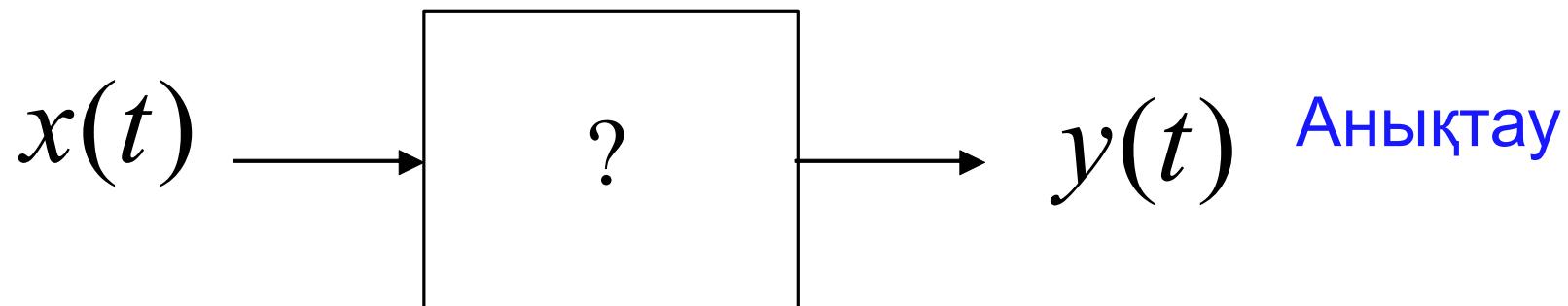
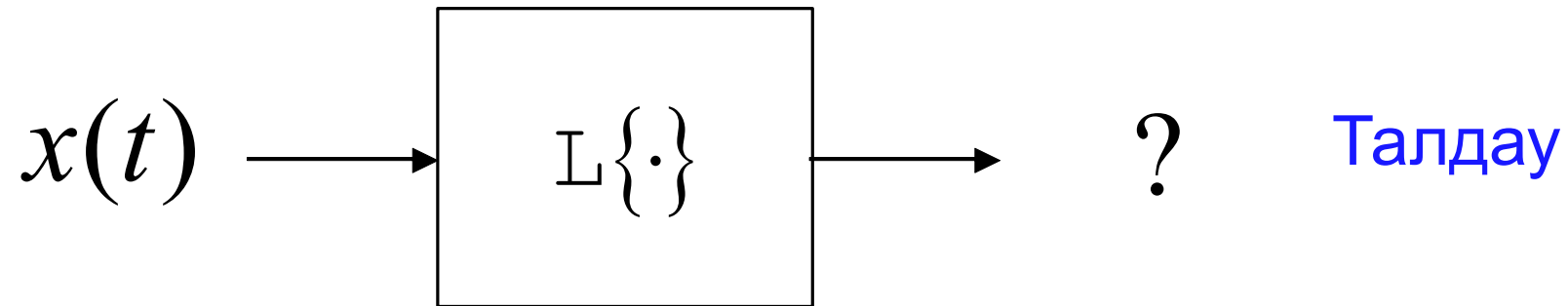
толығырақ:

$$y(t) = \mathbb{L}\{x(t)\} = \mathbb{L}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k u_k(t)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \mathbb{L}\{u_k(t)\}$$

спектралды коэффициенттері дәл сондай!

Бұл сызықтық тізбектерді талдаудың спектрлік әдісінің негізі болып табылады.

Тізбектермен байланысты мәселелер



Сызықты оператор

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \lambda_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}$$

ШЫҒЫС СИГНАЛ

$$y_k = \sum_{j=1}^N \lambda_{kj} x_j, \quad k = \overline{1, N}$$

$$\begin{array}{lcl} e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T & \longrightarrow & (\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{N1})^T \\ e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T & \longrightarrow & (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{N2})^T \\ e_N = (0, 0, \dots, 1)^T & \longrightarrow & (\lambda_{1N}, \lambda_{2N}, \dots, \lambda_{NN})^T \end{array}$$

Сызықты тізбектерді талдау

$$y(t) = \mathbb{L}\{x(t)\} = \mathbb{L}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k u_k(t)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \mathbb{L}\{u_k(t)\}$$

Кіріс сигнал динамикасы

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$x(\tau) \longleftrightarrow \alpha_k \qquad \delta(t - \tau) \longleftrightarrow u_k(t)$$

Сондықтан

$$\begin{aligned} y(t) = \mathbb{L}\{x(t)\} &= \mathbb{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathbb{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Сызықты тізбектерді талдау

Сызықты тізбектің шығысындағы сигнал

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau$$

мұнда $h(t, \tau)$ - t уақытындағы тізбектің жауап беруі $\delta(t - \tau)$

$h(t, \tau) = \mathbb{L}\{\delta(t - \tau)\}$ салмақты функция.

Ең маңызды ерекше жағдай: сызықтық ығысу-инвариантты немесе сызықтық стационарлық тізбектер: салмақ функциясы шын мәнінде тек аргументтердің айырмашылығына байланысты -

$$h(t, \tau) = h(t - \tau) \quad \text{онда}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Бұл – [Дюамель интегралы](#)

Дюамель интегралы

осындай таңбамен кейде белгілейді *

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

Айнымалыларды ауыстырып табуға да болады

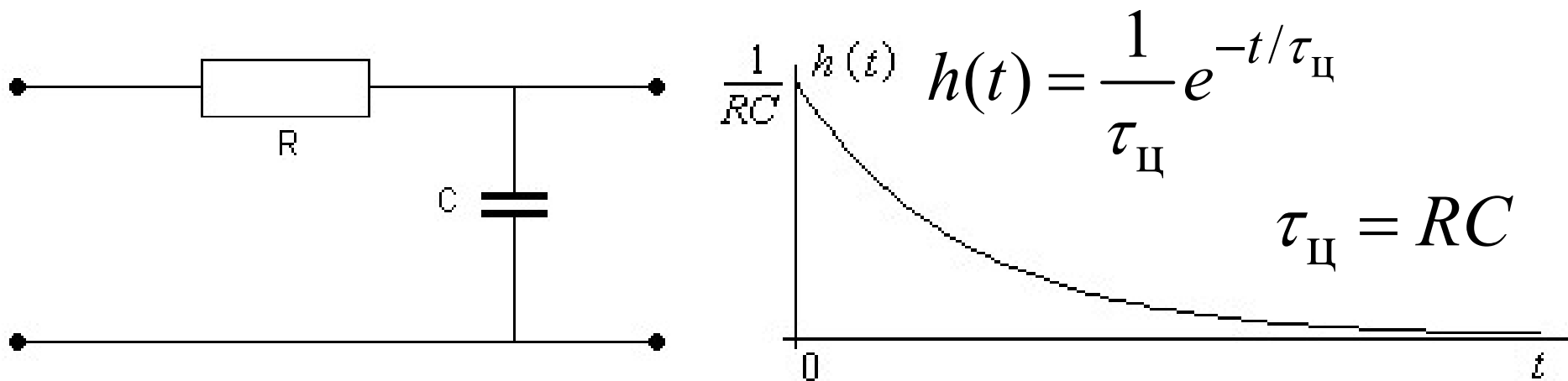
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

Осылайша, екілік операция ретінде конволюция коммутативті болып табылады

Егер $x(t) = \delta(t)$ онда

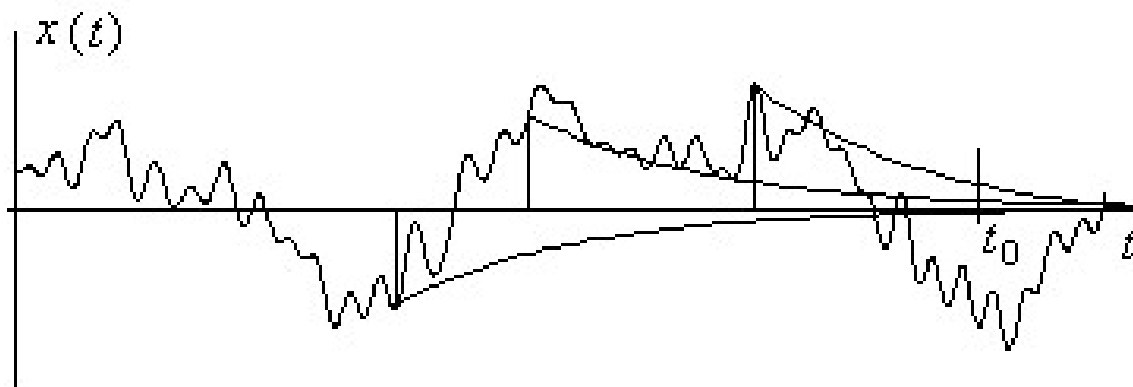
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)h(t - \tau)d\tau = h(t)$$

Мысалы тізбектің импульстік сипаттамасы



Себептілік шарты

$$h(t) \equiv 0 \text{ кезінде } t < 0$$



$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t_0 - \tau) d\tau$$

Сызықты тізбектің интегралды сипаттамасы

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

импульсті сипаттаманың
Фурье түрлендіруі

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df$$

импульсті сипаттаманың
кері Фурье түрлендіруі

(АЖС) $|H(f)| = K(f)$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

ФЖС $\arg\{H(f)\} = \varphi(f)$

$$H(f) = K(f) e^{j\varphi(f)}$$

әсер сигналы $e^{j2\pi ft}$

$$H(f) e^{j2\pi ft} = K(f) e^{j[2\pi ft + \varphi(f)]}$$

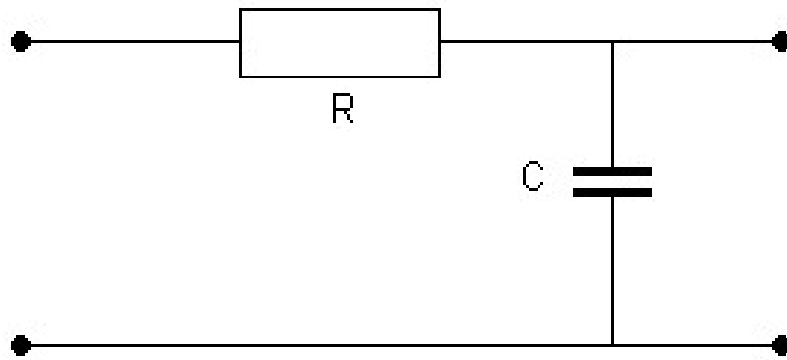
Шығыс спектрі

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

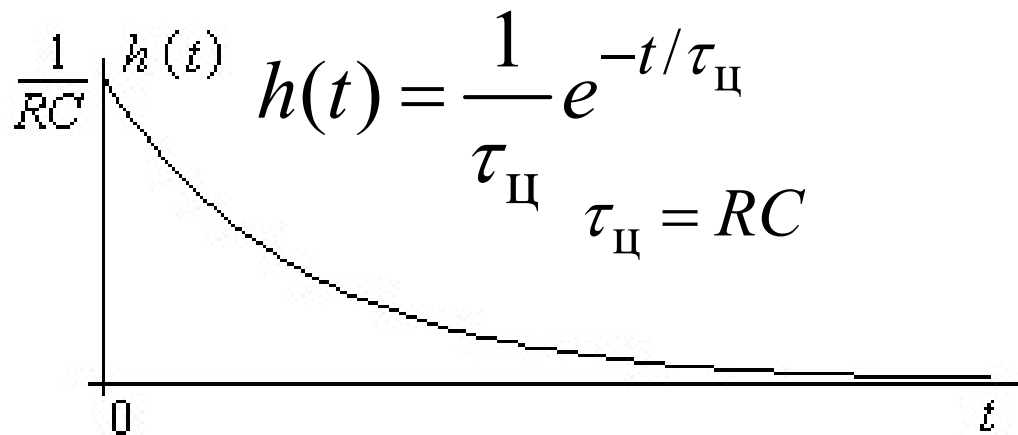
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{H(f)X(f)}_{Y(f)} e^{j2\pi ft} df$$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

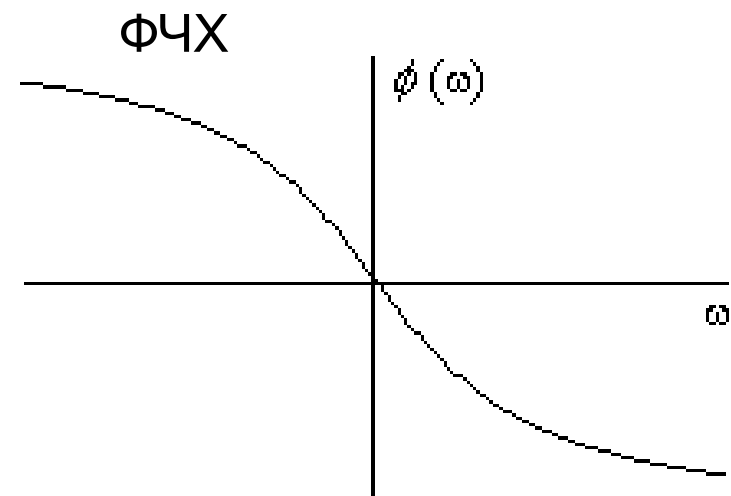
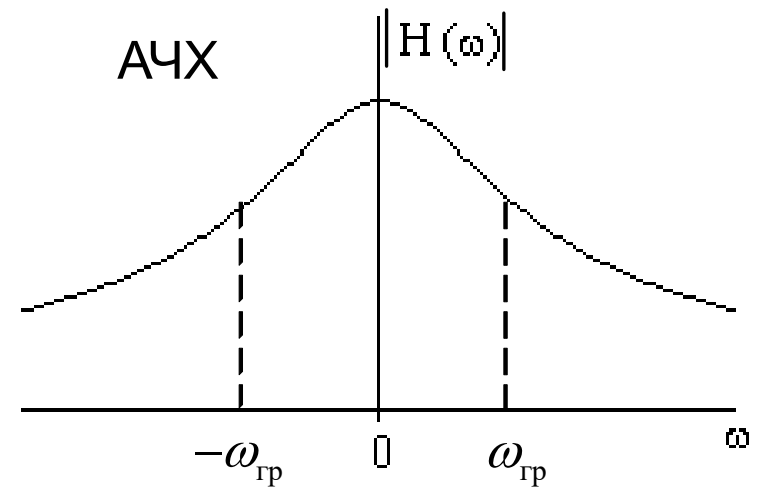
Мысалы



Импульсті сипаттама



$\omega_{\text{гр}}$ – шекті жиілік



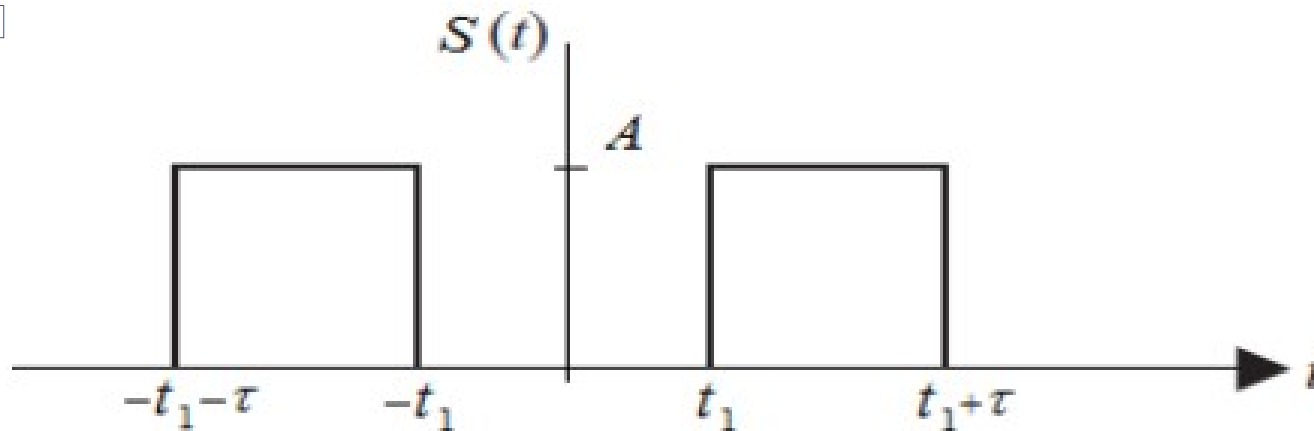
Бақылау сұрақтары

1. Фурье тура және кері түрлендіру формуласын жазыңыз
2. Рэлей жалпылама формуласын жазыңыз
3. Парсеваль теңдігін жазыңыз
4. Гильберт түрлендіруін жазыңыз
5. Дискретті сигналдың Фурье түрлендіруін жазыңыз
6. Автокорреляциялық функция туралы қасиеттерін қоса жазыңыз
7. Сызықты жүйелер, сызықты операторлар туралы жазыңыз
8. Дюамель интегралы туралы жазыңыз
9. Сызықты тізбектің интегралды сипаттамасы және шығыс спектрі туралы жазыңыз.

Есептер

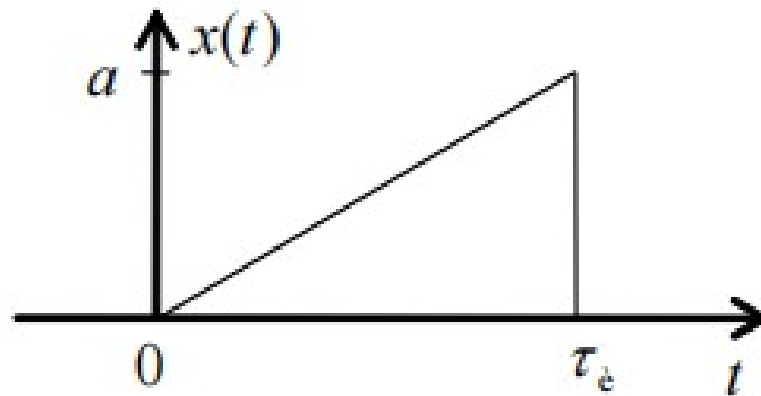
1. Тікбұрышты импульс былай анықталады $r(t)=\sigma(t+0.5)-\sigma(t-0.5)$, оның автокорреляциялық функциясын табыңыз.
2. Мынадай импульсті сигналдың автокорреляциялық функциясын табыңыз $u(t)=Ar(t)$, $t = 0$ мен 1 аралығында, $A<0$ кезінде; $A>0$ кезінде.
3. Суретте көрсетілген функцияның автокорреляциялық функциясын табыңыз.

□ □ □ □ □ □



Есептер

4. Суретте көрсетілген аратәрізді импульстің және сондай амплитудадағы, бірақ ұзақтығы екі есе көп видеоимпульс арасындағы өзаракорреляция функциясын табыңыз.



5. ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ .